Corrigé de l'examen de moyenne durée de physique du solide du 12/05/2024 L3 PF

I-1° Les équations du mouvements du $n^{ème}$ atome obéit à la relation suivante:

$$m\acute{u}_n = \beta(u_{n+1} - u_n) + \beta(u_{n-1} - u_n)$$

0,25

$$m\acute{u}_n = \beta(u_{n+1} - u_{n-1} - 2u_n)$$ **0,25**

A partir de solutions de la forme :

U_n =Aexpi(kx-ωt)= Aexpi(k.na-ωt) **0,25**

avec : $u_{n+1} = expika.\ U_n$ **0,25**

et $u_{n-1} = exp - ika.\ U_n$ **0,25**

En substituant cette solution dans l'équation précédente on obtient :

-mω^2 =-$\beta(2 - expika - exp - ika)$ =2β(1-cos2ka)=4β$sin^2\frac{ka}{2}$ 01

ω=2$\sqrt{\frac{\beta}{m}}\left|sin\frac{ka}{2}\right|$ ***0,50***

2-on a la vitesse du groupe note v_g

$V_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{a}{2}2\sqrt{\frac{\beta}{m}}\left|cos\frac{ka}{2}\right|=a\sqrt{\frac{\beta}{m}}\left|cos\frac{ka}{2}\right|$ 01

La vitesse du son notée:

v_s=$lim_{k\to 0}\,Vg$= a$\sqrt{\frac{\beta}{m}}$ **0,50**

ω=2$\frac{vs}{a}\left|sin\frac{ka}{2}\right|$ avec $\omega = 2\pi\nu$ on a $\nu=\frac{\omega}{2\pi}$ on obtient: $\nu_{max}=\frac{\omega_{max}}{2\pi}=2\frac{vs}{2\pi a}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\beta}{m}}$ 01

II- a) 1° quand on utilise les conditions aux limites fixes suivant l'axe des z , il faut satisfaire les conditions suivantes :

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi(x, y, L) = 0$$ **0,25**

dans ce cas la fonction d'onde associée est de forme stationnaire : $\varphi(z) = Asink_z.z$

et suivant les axes xOy on applique les conditions aux limites périodiques comme suit:

$$\varphi(x + L, y, 0) = \varphi(x, y + L, z) = \varphi(x, y, z)$$ **0,25**

et la fonction d'onde associé dans ce cas et de la forme : $\varphi(x,y) = Bexpi{+}k_y.y$

Par conséquent la fonction d'onde associée au problème est de la forme :

$\varphi(x,y,z) = A'sink_z.zexpi{+}k_y.y$ **0,50**

A et A' est B sont des constantes à déterminer à partir de la condition de normalisation.

b) 1° En appliquant les conditions aux limites périodique on a le cas des ondes progressive de la forme :

$\psi(r) = Aexpi\vec{k}.\vec{r}$ qui se propage dans le solide. **0,50**

Avec les conditions aux limites périodique de B.V.K suivante:

$\psi(x + L_1, y, 0) = \psi(x, y + L_2, z) = \psi(x, y, z + L_3) = \psi(x, y, z)$ **0,50**

En remplaçant dans la fonction d'onde associée , on obtient:

$k_x = \frac{2\pi}{L_1}n_1$, $k_y = \frac{2\pi}{L_2}n_2$ et $k_z = \frac{2\pi}{L_3}n_3$ avec n_1, n_2 et n_3 0 **01,00**

dans ces conditions on obtient: g(k) $=\frac{1}{\frac{2\pi 2\pi}{L_1 L_2}.\frac{2\pi}{L_3}} = \frac{L_1}{2\pi}.\frac{L_2}{2\pi}.\frac{L_3}{2\pi} = \frac{V}{8\pi^3}$ **00,75**

2° Dans le cas du modèle du de Debye, la relation de dispersion est donnée par l'expression suivante: $\omega = v_s.k$, **00,50** la densité d'états par unité de fréquence , g(ν) est :

On a: $g(\upsilon)d\upsilon = g(\omega)d\omega$ avec $g(\omega)d\omega$ =g(k)d^3k **01,00** $\Longrightarrow$

$g(\omega) = g(k)\int ds\frac{dk}{d\omega}=\frac{V}{8\pi^3}\int\frac{ds}{\nabla_{\omega(k)}}=\frac{V}{8\pi^3}\frac{1}{v_s}(4\pi k^2)=\frac{V}{2\pi^2}\frac{\omega^2}{{v_s}^3}$. **01,00**

Par conséquent on a ; $g(\upsilon) = g(\omega)\frac{d\omega}{d\upsilon}$ 00,25 avec ω=2πν 00,25 ce qui donne $\frac{d\omega}{d\upsilon} = 2 \Longrightarrow g(\upsilon) = 2.g(\omega)$=$\frac{V}{\pi}\frac{4\pi^2\upsilon^2}{{v_s}^3}$=$\frac{4\pi V}{{v_s}^3}.\upsilon^2$ **01,00**

3°La fréquence de Debye ν_D;

On a $\int_0^{\nu_D} g(\upsilon)d\upsilon = 3N \Longrightarrow \frac{4\pi V}{{v_s}^3}\int_0^{\nu_D}\upsilon^2 d\upsilon = 3N \Longrightarrow \frac{4\pi V}{{v_s}^3}.\frac{\nu_D^3}{3} = 3N \Longrightarrow \nu_D^3 = \frac{9N.{v_s}^3}{4\pi V} \Longrightarrow \nu_D = \left(\frac{3n}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.v_s$ **01,50**

avec n=N/V

on obtient**:** $g(\upsilon)$=$\frac{4\pi V}{{v_s}^3}.\upsilon^2$=$\frac{4\pi V}{\frac{4\pi V}{9N}}.\frac{\upsilon^2}{\nu_D^3} = 9N.\frac{\upsilon^2}{\nu_D^3}$ **01,00**

4° U sous forme d'intégrale:

U=$\int_0^{\nu_D} g(\upsilon).Ed\upsilon = \frac{9N}{\nu_D^3}\int_0^{\nu_D}\upsilon^2.\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}d\upsilon$=$\frac{9N}{\nu_D^3}\int_0^{\nu_D}\frac{h\upsilon^3}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}d\upsilon$ 01,00

On a $h\nu_D = k_B\theta_D \Longrightarrow \theta_D = \frac{h\nu_D}{k_B}$ **pour ce faire on pose : x=** $\frac{h\nu}{k_BT} \Longrightarrow dx = \frac{h}{k_BT}d\nu$et x_D=$\frac{h\nu_D}{k_BT}$ **01,00**

U=$\frac{9N}{\nu_D^3}.h.\left(\frac{k_BT}{h}\right)^4\int_0^{\nu_D}\frac{x^3}{e^x-1}dx = 9N(k_BT).\left(\frac{k_BT}{h\nu_D}\right)^3.\int_0^{x_D}\frac{x^3}{e^x-1}dx$=**9N**$k_BT\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3\int_0^{x_D}\frac{x^3}{e^x-1}dx$ **01,00**

5° L'expression de l'énergie à haute température: $h\nu_D < k_BT$ **, dans ce cas:** x_D=$\frac{h\nu_D}{k_{BT}} \ll 1$ **00,25**

$e^x = 1 + x$ **00,25**

U=**9N**$k_BT\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3\int_0^{x_D}\frac{x^3}{e^x-1}dx$=**9N**$k_BT\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3\int_0^{x_D}x^2dx$=**9N**$k_BT\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3.\frac{x_D^3}{3}$=3N$k_BT\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3\left(\frac{h\nu_D}{k_{BT}}\right)^3$ **01,00**

La capacité calorifique à haute température est donnée par: $C_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_v$ =3Nk_B **00,50**